

PARTIE A

Soit la fonction φ définie dans $\mathbf{R}$ par

$$\varphi(x) = e^x + x + 1.$$

1. Étudier le sens de variation de φ et ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ a une solution et une seule α et que l'on a :
$$-1,28 < \alpha < -1,27$$
3. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbf{R}$.

PARTIE B

Soit la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal ($O ; \vec{i}, \vec{j}$) du plan (unité graphique : 4 cm).

1. Montrer que :

$$f'(x) = \frac{e^x \varphi(x)}{(e^x + 1)^2}.$$

En déduire le sens de variation de f .

2. Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

3. Soit T la tangente à (C) au point d'abscisse 0.

Donner une équation de T et étudier la position de (C) par rapport à T .

4. Chercher les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Démontrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à (C) et étudier la position de (C) par rapport à D .

5. Faire le tableau de variation de f .