

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2.
 - a. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 4$, $u_n \geq 0$.
 - b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 5$, $u_n \geq n - 3$.
 - c. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$.
 - a. Démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
 - b. En déduire que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{25}{4} \left(\frac{1}{3} \right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$.
 - c. Soit la somme S_n définie pour tout entier naturel n par : $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.
Déterminer l'expression de S_n en fonction de n .