

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = 16$; $v_0 = 5$; et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{3u_n + 2v_n}{5} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et v_1 .
2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = u_n - v_n$.
 - (a) Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $0,1$.
En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de w_n en fonction de n .
 - (b) Préciser le signe de la suite (w_n) et la limite de cette suite.
3. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n = -0,4w_n$.
(b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est croissante. On admet ce résultat, et on remarque qu'on a alors : pour tout entier naturel n , $v_n \geq v_0 = 5$.
(c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq 5$.
En déduire que la suite (u_n) est convergente. On appelle ℓ la limite de (u_n) .
On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est convergente. On admet ce résultat, et on appelle ℓ' la limite de (v_n) .
4. (a) Démontrer que $\ell = \ell'$.
(b) On considère la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par : $c_n = 5u_n + 4v_n$.
Démontrer que la suite (c_n) est constante, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n , on a : $c_{n+1} = c_n$.
En déduire que, pour tout entier naturel n , $c_n = 100$.
(c) Déterminer la valeur commune des limites ℓ et ℓ' .