

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1 + 2u_n}$$

1. (a) Calculer u_1 et u_2 .
(b) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , $0 < u_n$.
2. On admet que pour tout entier naturel n , $u_n < 1$.
(a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
(b) Démontrer que la suite (u_n) converge.
3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$.
(a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.
(b) Exprimer pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .
(c) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$.
(d) Déterminer la limite de la suite (u_n) .