

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Etude des propriétés de la fonction f

- a) Etudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
- b) Résoudre dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$ l'équation $f(x) = x$.
On note α la solution.
- c) Montrer que si x appartient à l'intervalle $[0 ; \alpha]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0 ; \alpha]$.
De même, montrer que si x appartient à l'intervalle $[\alpha ; +\infty[$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[\alpha ; +\infty[$.

2. Etude de la suite (u_n) pour $u_0 = 0$

Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n + 1}.$$

- a) Sur le graphique représenté dans l'annexe 2, sont représentées les courbes d'équations $y = x$ et $y = f(x)$.
Placer le point A_0 de coordonnées $(u_0 ; 0)$ et, en utilisant ces courbes, construire à partir du point A_0 les points A_1, A_2, A_3 et A_4 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et u_4 .
Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite (u_n) ?
- b) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.
- c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

