

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $] -\infty ; 1[$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{x-1}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $] -\infty ; 1[$.

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en 1.

b. En déduire une interprétation graphique.

2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

3. a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $] -\infty ; 1[$, on a

$$f'(x) = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}.$$

b. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $] -\infty ; 1[$.

4. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $] -\infty ; 1[$, on a

$$f''(x) = \frac{(x^2 - 4x + 5)e^x}{(x-1)^3}.$$

a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $] -\infty ; 1[$.

b. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

c. En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $] -\infty ; 1[$, on a :

$$e^x \geqslant (-2x-1)(x-1).$$