

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par

$$f(x) = 2xe^{-x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; 1]$.

1. **a.** Résoudre sur l'intervalle $[0; 1]$ l'équation $f(x) = x$.
- b.** Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; 1]$,

$$f'(x) = 2(1 - x)e^{-x}.$$

- c.** Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel,

$$0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1.$$

- b.** En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. Démontrer que la limite de la suite (u_n) est $\ln(2)$.