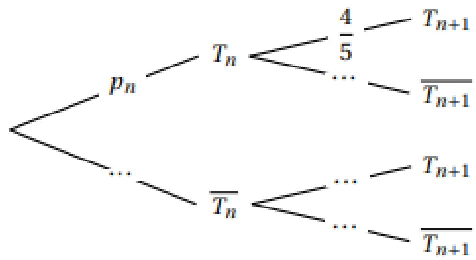
TIKTOK 133

Un tireur à l'arc s'entraîne sur une cible dans le but d'atteindre son centre.
On modélise la situation de la façon suivante :

- au premier tir, il atteint le centre de la cible avec une probabilité de $\frac{1}{2}$;
- pour les tirs suivants :
  - lorsqu'il a atteint le centre de la cible au tir précédent, la probabilité qu'il atteigne à nouveau le centre de la cible est $\frac{4}{5}$;
  - lorsqu'il n'a pas atteint le centre de la cible au tir précédent, la probabilité qu'il atteigne le centre de la cible est $\frac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'événement T_n : « Le tireur atteint le centre de la cible au n-ième tir ».
On note $p_n = P(T_n)$ la probabilité que l'évènement T_n se réalise.

1. Donner la valeur de p_1 et montrer que $p_2 = \frac{17}{30}$.
2. Recopier sur la copie l'arbre de probabilité suivant et compléter les pointillés avec les probabilités qui conviennent :



3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$p_{n+1} = \frac{7}{15}p_n + \frac{1}{3}$$

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = p_n - \frac{5}{8}$$

   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{7}{15}$.
   b. Déterminer une expression de u_n en fonction de n.
   c. En déduire une expression de p_n en fonction de n.

5. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

7. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $\quad p_n \geqslant 0{,}6$.