TIKTOK 131

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\left]-\infty ; \frac{3}{2}\right[$ par :

$$f(x) = \frac{x-2}{2x-3}$$

1. Justifier tous les éléments du tableau de variation ci-dessous.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$
f	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

2. En déduire que pour tout $x \in [0;1]$, on a :

$$f(x) \in [0;1].$$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 2}{2u_n - 3}, \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. En utilisant la fonction f, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge.

3. On note ℓ la limite de la suite (u_n).
En admettant que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0;1]$, montrer que $\ell = 1$.

4. On donne ci-dessous une fonction `seuil` écrite en langage Python.

```
def seuil(h):
  n = 0
  u = 0
  while u < 1-h:
    n = n+1
    u = (u-2)/(2*u-3)
  return n
```

L'appel `seuil(0.0001)` renvoie la valeur 5 000.
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

5. **a.** Donner les quatre premiers termes de la suite (u_n) sous forme de fractions irréductibles.
b. Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n et démontrer cette conjecture.