

**EXERCICE 3****5 points**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points

$$A(1;2;3), \quad B(-1;3;1), \quad C(2;1;6) \quad \text{et} \quad D(3;-2;-1).$$

1.
  - a. Montrer que les points A, B et C définissent un plan.
  - b. Montrer que le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$  est normal au plan (ABC).
  - c. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
2.
  - a. Déterminer une équation paramétrique de la droite  $(d)$ , perpendiculaire au plan (ABC) et passant par le point D.
  - b. Déterminer les coordonnées du point H qui est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).
  - c. En déduire que la distance du point D au plan (ABC) est égale à  $3\sqrt{2}$ .
3.
  - a. Montrer que

$$\cos(\widehat{BAC}) = -\frac{3\sqrt{11}}{11}$$

- b. En déduire la valeur exacte de  $\sin(\widehat{BAC})$ .
  - c. Montrer que l'aire du triangle ABC vaut  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ .
4. Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

On rappelle que le volume  $\mathcal{V}$  d'un tétraèdre est donné par la formule suivante :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h, \quad \text{où } \mathcal{B} \text{ est l'aire d'une base et } h \text{ la hauteur qui lui est associée.}$$