TIKTOK 127

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Partie A

1. **a.** Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   b. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2. Pour tout réel strictement positif x, démontrer que

$$f'(x) = \frac{1-2\ln(x)}{x^3}$$

3. Dresser le tableau de variation de la fonction f en précisant les limites et les valeurs exactes des éventuels extremums de la fonction.
4. Déterminer l'équation réduite de la droite Δ, tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
5. Vérifier que pour tout réel strictement positif x, on a

$$f''(x) = \frac{-5+6\ln(x)}{x^4}$$

6. **a.** Étudier la convexité de la fonction f en précisant les coordonnées des éventuels points d'inflexion.
   b. En déduire que, pour tout réel x appartenant à $\left]0\,;\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right]$, on a

$$x-1 \geqslant \frac{\ln(x)}{x^2}$$

7. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $\left[\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\,;+\infty\right[$, on a aussi

$$x-1 \geqslant \frac{\ln(x)}{x^2}$$

Partie B

On considère la suite (I_n) définie, pour tout entier naturel non nul n, par :

$$I_n = \int_1^n \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

1. Donner une interprétation graphique de I_n pour n un entier naturel non nul.
2. Démontrer que la suite (I_n) est croissante.

4. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel non nul n,

$$I_n = \frac{n-1-\ln(n)}{n}$$

5. Calculer la limite de la suite (I_n) quand n tend vers $+\infty$.