TIKTOK 126

On pourra traiter indépendamment les deux parties de l'exercice.
On arrondira, si nécessaire, les résultats à 10^{-3} près.

Dans cet exercice, on s'intéresse aux lancers-francs effectués par un joueur lors de compétitions de basketball.
Pour modéliser la situation, on considère dans chaque partie du problème que les conditions dans lesquelles s'effectuent ces lancers sont identiques et que ces lancers sont indépendants deux à deux.

Partie A

Les statistiques de réussite des lancers-francs d'un joueur sont de 49,2 % lors d'une saison.
Dans cette partie, on assimilera cette fréquence à sa probabilité de réussite d'un lancer-franc.
Au cours d'un match, ce joueur tente 16 lancers-francs.
On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de lancers-francs réussis par ce joueur lors de ce match.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X et l'interpréter dans le contexte de cet exercice.
3. Calculer $P(X = 5)$.
4. Calculer la probabilité que le joueur réussisse au moins six lancers-francs.

Partie B

On note p la probabilité que le joueur réussisse un lancer-franc, où p est un réel tel que

$$0 \leqslant p \leqslant 1$$

On se place dans le cas où le joueur effectue 3 lancers-francs.
On désigne par Y la variable aléatoire qui donne le nombre de lancers-francs réussis par ce joueur.

1. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire Y.
2. Exprimer $P(Y = 2)$ en fonction de p.
3. Donner la loi de probabilité de Y.
   Présenter la réponse sous forme de tableau.
4. Montrer que
   $$P(Y \geqslant 2) = -2p^3 + 3p^2$$
5. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par
   $$f(x) = -2x^3 + 3x^2.$$
   a. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$ et dresser son tableau de variation en y faisant figurer les valeurs aux bornes de l'intervalle $[0;1]$.
   b. En déduire l'existence d'une unique valeur α dans l'intervalle $[0;1]$ telle que $f(\alpha) = 0{,}9$.
   c. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette valeur α.
   d. Interpréter la valeur de α dans le contexte de l'exercice.