TIKTOK 124

1. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$ par :

$$g(x) = x\cos(x) - \sin(x)$$

On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$ et on note g' sa dérivée.

   a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;2\pi]$, on a :

$$g'(x) = -x\sin(x)$$

   b. On donne le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$ ci-dessous.
   Justifier chacun des éléments qui figurent dans ce tableau de variations.

x	0		π		2π
g	0	$\searrow$	$-\pi$	$\nearrow$	2π

   c. Montrer qu'il existe une unique valeur réelle α dans l'intervalle $[\pi\,;2\pi]$ telle que $g(\alpha) = 0$.

   d. En déduire le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;2\pi]$ par :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0\,;2\pi]$ et on note f' sa dérivée.

   a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;2\pi]$ on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

   b. Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle $]0\,;2\pi]$.

   c. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;2\pi]$.

   d. Déterminer la limite de f en 0. On pourra utiliser le taux d'accroissement de la fonction sinus en 0.

3. On considère deux nombres réels r et s qui vérifient l'inégalité : $0 < r < s < \pi$.
Montrer que :

$$\frac{r}{s} < \frac{\sin(r)}{\sin(s)}$$