Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Etude des propriétés de la fonction f

a) Etudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

b) Résoudre dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ l'équation $f(x) = x$.
On note α la solution.

c) Montrer que si x appartient à l'intervalle $[0\ ;\ \alpha]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0\ ;\ \alpha]$.
De même, montrer que si x appartient à l'intervalle $[\alpha\ ;\ +\infty[$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[\alpha\ ;\ +\infty[$.

2. Etude de la suite (u_n) pour $u_0 = 0$

Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n + 1}.$$

a) Sur le graphique représenté dans l'annexe 2, sont représentées les courbes d'équations $y = x$ et $y = f(x)$.
Placer le point A_0 de coordonnées $(u_0\ ;\ 0)$ et, en utilisant ces courbes, construire à partir du point A_0 les points A_1, A_2, A_3 et A_4 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et u_4.
Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite (u_n) ?

b) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

feuille b