TIKTOK 114

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x(\ln x)^2.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. On note f' sa fonction dérivée

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Pour tout réel $x > 0$, on pose $g(x) = x\ln x$.

a. Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a $f(x) = 4\left(g\left(\sqrt{x}\right)\right)^2$.

b. En déduire $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

3. Dans cette question, on étudie les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

a. Démontrer que sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $\quad f'(x) = (\ln x)(2 + \ln x)$.

b. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

c. Donner la valeur exacte du maximum de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$.

4. On considère l'équation $f(x) = 2$.

a. Justifier que, sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, cette équation admet une unique solution. On note α cette solution.

b. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.

5. Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0; 1]$.

a. Donner une interprétation géométrique de $\displaystyle\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

b. À l'aide d'une intégration par parties, justifier que :

$$\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 - \int_a^1 x\ln x\,\mathrm{d}x.$$

c. En utilisant à nouveau une intégration par parties, démontrer que :

$$\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 + \frac{a^2}{2}\ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}.$$

d. Déterminer la limite de $\displaystyle\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ quand a tend vers 0.