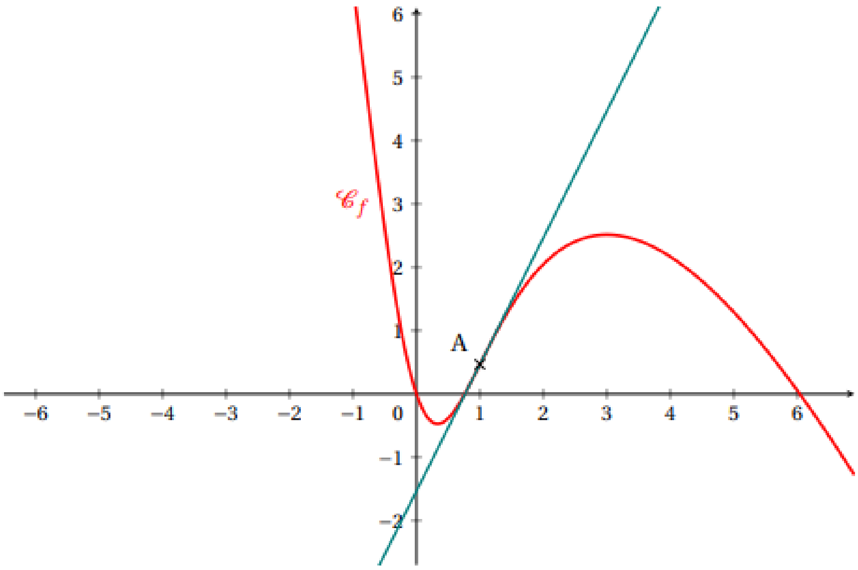
TIKTOK 111

EXERCICE 4 **5 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 5\ln\left(x^2+1\right) - 3x$$

et on admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1.



1. Conjecturer, à l'aide de la représentation graphique de la fonction f, les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.

TIKTOK 111

2. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $-\infty$.

3. **a.** Démontrer que, pour tout x réel strictement positif,

$$f(x) = x\left(10\frac{\ln x}{x} - 3\right) + 5\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

   b. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $+\infty$.

4. **a.** Démontrer que pour tout x réel, $\quad f'(x) = \dfrac{-3x^2 + 10x - 3}{x^2 + 1}$.

   b. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x,

$$f''(x) = \frac{-10x^2 + 10}{\left(x^2 + 1\right)^2}$$

   a. Valider ou rejeter la conjecture faite à la question **1**.

   b. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1.

   c. En déduire que pour tout $x \geqslant 1$, $\quad \ln\left(x^2 + 1\right) \leqslant x + \ln(2) - 1$.