TIKTOK 108

Partie A : étude du sens de variation d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$$

1. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

2. **a.** On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Vérifier que, pour tout réel x,on a $f'(x) = \dfrac{2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie B : étude de la convergence d'une suite récurrente

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < \sqrt{3}$.

2. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

3. Le but de cette question est de retrouver par une autre méthode les résultats de la question **2.** de la **partie B**.

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$v_n = \frac{u_n^2}{3-u_n^2}$$

On admet que la suite (v_n) est bien définie.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 4 dont on précisera le premier terme.

b. En déduire une expression de v_n en fonction de n puis que $u_n = \sqrt{\dfrac{1{,}5 \times 4^n}{1+0{,}5 \times 4^n}}$ pour tout entier naturel n.

c. En déduire la limite de la suite (u_n).

Partie C : étude de la convergence de la somme de termes

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \ldots + u_{n-1}^2$.

2. On rappelle que, pour tout entier naturel k, on a $1 \leqslant u_k \leqslant \sqrt{3}$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $n \leqslant S_n \leqslant 3n$.

3. En déduire les limites respectives de S_n et de $\dfrac{S_n}{n^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.