


Partie A

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x - \ln(x^2 + 1).$$

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $f(x) = x$.
2. Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-dessous à l'exception de la limite de la fonction f en $+\infty$ que l'on admet.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$		

3. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $[0; 1]$, $f(x)$ appartient à $[0; 1]$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[0; 1]$.
2. Étudier les variations de la suite (u_n) .
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
4. On note ℓ sa limite, et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.
En déduire la valeur de ℓ .