ECE Paris - Ecole d'ingénieurs

Recueil d'exercices – Analyse et Algèbre

ING 1

Année 2025-2026

Chapitre 1. Outils algébriques

Exercice 1. 1. Calculer les sommes et les produits suivants :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$
2. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k^2}\right)$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)}$

Exercice 1. 2. Soit : $P_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{x}{k}\right)$

1. Calculer $P_n(0), P_n(1)$ et $P_n(-n)$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ P_n(x) = \dfrac{x+n}{x} P_n(x-1)$.
3. $\forall p \in \mathbb{N}^*$, écrire $P_n(p)$ comme coefficient du binôme.

Exercice 1. 3. Développer :

1. $(x+1)^6$
2. $(x-1)^6$
3. $\left(x^2-3\right)^7$
4. $(2x-y)^5$

Exercice 1. 4. Soit $f(x) = (1+x)^n$

1. (a) Développer $f(x)$ en utilisant la formule du binôme de Newton
   (b) Calculer $f'(x)$ pour $n \geq 1$
   (c) Calculer $f''(x)$ pour $n \geq 2$
2. (a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$
   (b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$
   (c) Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1) \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$

Exercice 1. 5. Soit $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$.

a. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$.

b. Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left(\frac{1}{x-c}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n\ n!}{(x-c)^{n+1}}.$$

c. Calculer $f^{(n)}(x)$.

Exercice 1. 6. Soit $x \in \mathbb{R}^+$.
Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1,\ (1+x)^n \geq 1 + nx$

Exercice 1. 7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Chapitre 2. Fonctions réelles.

Exercice 2. 1. Soient $P(x) = x^5 - 3x - 2$ et $f(x) = x2^x - 1$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Montrer que :

1. l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution dans $[1, 2]$
2. l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0, 1]$
3. l'équation $P(x) = f(x)$ a au moins une racine dans $[0, 2]$.

Exercice 2. 2. On considère la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1.$$

1. Étudier les variations de P sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que l'équation $P(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]-\infty, 1]$. Montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution, a, sur $[1, +\infty[$. Donner un encadrement de a.
3. Déterminer le signe de P sur $\mathbb{R}$.
   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^3}$.
4. Déterminer les limites de f aux bornes de son son domaine de définition. Que peut-on en déduire ?
5. Étudier les variations de f. Dresser le tableau de variation de f.
6. Montrer que $f(a) = \dfrac{2(1-a)}{3(a^2+1)}$. Donner un encadrement de $f(a)$.
7. Écrire une équation de la tangente (T) à la courbe (C), représentative de f au point d'abcisse 0.
8. Étudier la position de (C) par rapport à (T).

Exercice 2. 3. Soit $f : [0, 1] \longmapsto [0, 1]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe un point $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$. Donner une représentation graphique du résultat obtenu.

Exercice 2. 4. Soit $f : [0, 1] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 4$. Montrer qu'il existe $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $f(c + \frac{1}{2}) - f(c) = 2$.

Exercice 2. 5. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|}$ avec $f(0) = -1$.

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Étudier la continuité de la fonction f sur son ensemble de définition.
3. Étudier la dérivabilité de la fonction f sur son ensemble de définition.

Exercice 2. 6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ avec $f(0) = 1$.

a. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

b. Étudier la dérivabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

c. La fonction f est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2. 7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ avec $f(0) = 0$.

a. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

b. Étudier la dérivabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

c. La fonction f est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2. 8. *La formule de Leibniz*

1. Montrer que $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer la dérivée d'ordre n de la fonction $x^2 \sin x$.

Exercice 2. 9. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \longleftrightarrow +\infty} \sqrt{x(x+a)} - x$ b) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$ c) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

Exercice 2. 10. Utiliser la règle de l'Hospital pour déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{8^x - 5^x}{5x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

Chapitre 3. Fonctions inverses

Exercice 3. 1. Les fonctions suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $f_1(x) = x^2$
2. $f_2 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie par $f_2(x) = 2x - 7$
3. $f_3 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie par $f_3(x) = x - 7$

Exercice 3. 2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + x$. Montrer que f est bijective et tracer son graphe et celui de f^{-1}.

Exercice 3. 3.

1. Prouver que $g(x) = 5 + \sqrt{9 - x}$ est strictement décroissante sur $[0, 9]$.
2. Sous quelle condition la fonction g admet-elle une fonction réciproque ? Déterminer, dans ce cas, g^{-1}.

Exercice 3. 4. Soit $f : [1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ telle que $f(x) = x^2 - 1$.
Montrer que f est bijective et trouver sa bijection réciproque.

Exercice 3. 5. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
3. Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[-1, 1]$, notée $f|_{[-1,1]}$, réalise une bijection dans un intervalle que l'on précisera. Déterminer, dans ce cas, la réciproque de $f|_{[-1,1]}$.

Exercice 3. 6. Calculer

$$\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right),\ \arccos\left(\cos\frac{-2\pi}{3}\right),\ \arccos(\cos 4\pi),\ \arctan\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right).$$

Exercice 3. 7. Etablir que

1. $\arccos x + \arccos(-x) = \pi$
2. $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \operatorname{sgn}(x)\dfrac{\pi}{2}$

Exercice 3. 8. Exprimer en fonction de x les expressions suivantes :

1. $\cos(2 \arccos x)$
2. $\sin(2 \arccos x)$

3. $\cos(2 \arctan x)$
4. $\cos^2 \left(\frac{1}{2} \arccos x \right)$

Exercice 3. 9. Simplifier

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Exercice 3. 10. Simplifier

$$\arccos(2x^2 - 1)$$

Chapitre 4. Nombres complexes

Exercice 4. 1. Mettre sous forme cartésienne les nombres complexes suivants :

1. $(2+3i)(1+i)$
2. $\dfrac{5+2i}{1-2i}$
5. $\dfrac{5-i}{(3-2i)^2}$
6. $\left(\dfrac{2+i}{1-2i}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 4. 2. Mettre sous forme polaire les nombres complexes suivants :

1. $1-i\sqrt{3}$
2. $1-i$
3. $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$
4. $(1+i\sqrt{3})^5-(1-i\sqrt{3})^5$, $n \in \mathbb{N}^*$
5. $\dfrac{\cos\phi - i\sin\phi}{\sin\phi - i\cos\phi}$
6. $(1+i\tan\phi)^2$
7. $1+\cos\phi - i\sin\phi$
8. $e^{i\varphi}+(e^{i\varphi})^2$, $\varphi \in [0, 2\pi[$

Exercice 4. 3. Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

1. $1-i\sqrt{3}$
2. $-3+4i$

Exercice 4. 4. *Valeurs exactes de sinus et de cosinus*

1. Ecrire sous forme trigonométrique et sous forme algébrique les racines carrées de $\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$.

2. En déduire les valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

3. Retrouver les valeurs obtenues en 2. en utilisant les nombres complexes $e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Exercice 4. 5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(2+i)z^2-(5-i)z+2-2i=0$
2. $z^2-(2+i)z+7+i=0$
3. $z^4-2iz^2-5=0$
4. $z^8=\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$
5. $(z+1)^4+4(z-1)^4=0$
6. $(z-1)^6+(z-1)^3+1=0$

Exercice 4. 6. *Une nouvelle identité remarquable !*

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2z\cos\theta+1=0$.

2. On suppose que $z \in \mathbb{C}$ est une solution de l'équation $z+\dfrac{1}{z}=2\cos\left(\dfrac{\pi}{2020}\right)$. Déterminer la valeur de l'expression $z^{505}+\dfrac{1}{z^{505}}$.

Exercice 4. 7. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l' équation suivante : $\left(\dfrac{1-iz}{1+iz}\right)^n=\dfrac{1-i\tan a}{1+i\tan a}$.

Exercice 4. 8. Linéariser $\sin^5 x$ et $\sin^2 x \cos^3 x$.

Exercice 4. 9. En utilisant les nombres complexes, calculer $\cos 5x$ et $\sin 5x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

Exercice 4. 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer :

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta), \quad V_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$$

Chapitre 5. Polynômes

Exercice 5. 1. Effectuer la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :

1. $A = X^4 - X^3 + X - 2$ et $B = X^2 - 2X + 4$
2. $A = X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9$ et $B = X^2 - 5X + 4$

Exercice 5. 2. Décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :

1. $P = X^3 - 3$
2. $P = X^4 + X^2 + 4$
3. $P = X^4 - X^3 - X + 1$
4. $P = X^8 + 1$
5. $P = X^4 - 2X^2 \cos\theta + 1$, $\theta \in \mathbb{R}$
6. $P = X^{2n} - 1$, $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 5. 3. Montrez que i est racine double du polynôme

$$P(X) = X^6 + X^5 + 3X^4 + 2X^3 + 3X^2 + X + 1.$$

Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 5. 4. Décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ le polynôme

$$P = X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$$

sachant qu'il admet une racine multiple.

Chapitre 6. Fractions rationnelles

Exercice 6. 1. Donner les décompositions en éléments simples, sans calculer les coefficients, dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ des fractions rationnelles suivantes :

$$F_1 = \frac{X^4+1}{X^4-X}, \qquad F_2 = \frac{1}{X^2(X^2+1)} \quad \text{et} \quad F_3 = \frac{X^2-3X+2}{(X-1)^2(X^2+1)^2}$$

Exercice 6. 2. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}[X]$ puis sur $\mathbb{C}[X]$ les fractions rationnelles suivantes :

1. $F = \dfrac{1}{X(X-1)(X-2)}$
2. $F = \dfrac{2X+1}{(X^2-1)^2}$
3. $F = \dfrac{X^6-3X^4-3X^2-5}{X^2-4}$
4. $F = \dfrac{X^2-2X+3}{(X-1)^2(X^2+1)}$
5. $F = \dfrac{1}{X^4+1}$
6. $F = \dfrac{2X+1}{(X^2+X+1)(X-1)^2}$
7. $F = \dfrac{2X^4+3X^2+X+1}{X(X^2+1)^2}$
8. $F = \dfrac{X^2}{(X+1)^3(X-1)^2}$

Exercice 6. 3. Calculer

$$\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{k^2-1}\right).$$

Exercice 6. 4. Déterminer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k(k+1)} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

Chapitre 7. Intégration et calcul de primitives

Exercice 7. 1. Trouver les primitives ou calculer les intégrales suivantes :

$$
\begin{array}{llllll}
a) \displaystyle\int_0^2 (1-\mid x-1\mid)^3\ dx & b) & \displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\ dx & c) & \displaystyle\int (x+2)\sin(x^2+4x-6)\ dx \\
d) \displaystyle\int x\cos(2x)\ dx & e) & \displaystyle\int (t^2+1)e^{-t}dt & f) & \displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx \\
g) \displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x}\cos(2x)dx & h) & \displaystyle\int \cos x\ln(\sin x)\ dx & i) & \displaystyle\int \sin^8(t)\cos^3(t)\ dt \\
j) \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^4 t\ dt & k) & \displaystyle\int \arctan t\ dt & l) & \displaystyle\int \tan^2 x\ dx \\
m) \displaystyle\int \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}\ dx & n) & \displaystyle\int_1^e t^n\ln t\ dt & o) & \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)\ dx \\
p) \displaystyle\int_1^e \sin(\ln x)\ dx & q) & \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx & r) & \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+15}}
\end{array}
$$

Exercice 7. 2. En utilisant dans chaque cas un changement de variable adéquat, calculer les intégrales suivantes :

$$
\begin{array}{llllll}
a) \displaystyle\int_1^2 \frac{e^t}{\sqrt{1+e^t}}dt & b) & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\ t}{1+\sin\ t}dt & c) & \displaystyle\int_2^e \frac{1}{t\ \ln^5\ t}dt \\
d) \displaystyle\int_1^4 \frac{1}{(1+t)\sqrt{t}}dt & e) & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\ t}{3-2\cos\ 2t}dt & f) & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\sin\ t+\cos\ t}dt \\
g) \displaystyle\int \frac{dt}{\sin t} & h) & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan t}{1+\tan t}\ dt & i) & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{\cos t(1-\sin t)}
\end{array}
$$

Pour la question g), utiliser les règles de Bioche et le changement de variable $x=\tan(\dfrac{t}{2})$. Comparer les deux résultats.

Exercice 7. 3. En utilisant la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$, déterminer les primitives des fractions rationnelles suivantes :

$$
A(t)=\frac{1}{t^4-t^2},\qquad B(t)=\frac{t}{(t^2-4)^2},\qquad C(t)=\frac{t}{t^2-2t+5},\qquad D(t)=\frac{t+1}{t^3-8}
$$

Exercice 7. 4. Soit $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin(t)}dt$.

1. Calculer I.
2. En déduire la valeur de $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{1+\sin(t)}dt$.

Exercice 7. 5. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue et $a\in\mathbb{R}$. Montrer que :

1. Si f est paire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$.
2. Si f est impaire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$.
3. Si f est T-périodique alors $\displaystyle\int_{a}^{a+T} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(t)dt$.

Chapitre 8. Equations différentielles

Exercice 8. 1.

$$
\begin{array}{llll}
a) & y' + 2y = t^2 - 2t + 3 & b) & y' = -\dfrac{y}{x^2} - \dfrac{1}{x^2} \\
c) & ty' + y + \ln t = 0 & d) & (1-t)y' + y = \dfrac{t-1}{t} \\
e) & y' + \dfrac{y}{x^2} = e^{\frac{1}{x}} & f) & y' + \cos\ t\ y - \sin\ \mathrm{t}\ \cos\ \mathrm{t} = 0 \\
g) & y' - y \tan x = e^x & h) & (1+x^2)y^{'} + \dfrac{x^2-1}{x} y = -2
\end{array}
$$

Exercice 8. 2. En posant $z = y^2$, résoudre $y^{'} y + y^2 = \frac{1}{2} e^{-2x}$.

Exercice 8. 3. En utilisant le changement de variable $z = \frac{1}{y}$, résoudre l'équation différentielle de Bernoulli suivante :

$$x^2 y^{'} + y + y^2 = 0.$$

Exercice 8. 4. Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$
\begin{array}{llll}
a) & y^{''} + y^{'} - 6y = 1 - 8t - 30t^2 & b) & y^{''} + 2y^{'} + y = 2e^{-t} \\
e) & y^{''} - 2y^{'} + y = te^t \sin t & f) & y^{''} - 3y^{'} + 2y = (-3t^2 + 10t - 7)e^t \\
k) & y^{''} + y^{'} = \cos^3 t & l) & y^{''} + \omega^2 y = \sin(\omega t)
\end{array}
$$

Exercice 8. 5. *Résolution avec conditions initiales !*

1. Résoudre l'équation différentielle $y' + \frac{y}{x} = x \ln x$ avec la condition initiale $y(1) = 0$.

2. Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' - 6y = 5e^{2x}$ avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 8. 6. En posant $y = \frac{z}{\cos t}$, résoudre $y'' \cos t - 2y' \sin t - 2y \cos t = e^t$.

Chapitre 9. Développements limités

Exercice 9. 1. Déterminer les $DL(0,n)$ des fonctions suivantes et donner un équivalent simple de chacune d'elles au voisinage de 0.

1. $f_1(x) = (\ln(1+x))^2$, $n = 4$
2. $f_2(x) = e^x \sin(x)$, $n = 4$
3. $f_3(x) = e^{1-x^2}$, $n = 4$
4. $f_4(x) = \dfrac{1}{\cos x}$, $n = 4$
5. $f_5(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$, $n = 3$
6. $f_6(x) = \sqrt{1+\tan(x)}$, $n = 3$
7. $f_7(x) = (\cos x)^{\sin x}$, $n = 4$
8. $f_8(x) = \arctan(\sin x)$, $n = 3$

Exercice 9. 2. Déterminer les $DL(a,n)$ des fonctions suivantes et donner un équivalent simple de chacune d'elles au voisinage de a.

1. $f_1(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $\quad (a = 1, n = 3)$
2. $f_2(x) = \sin x$, $\quad (a = \dfrac{\pi}{4}, n = 4)$
3. $f_3(x) = \sqrt{x}$, $\quad (a = 2, n = 3)$
4. $f_4(x) = e^{x^2}$, $\quad (a = 1, n = 3)$

Exercice 9. 3. Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{2x^3}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{2}{x}\right)\right)^x$
5. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2$
6. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(x^2 e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} - e x^3 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$

Exercice 9. 4. Une façon originale d'obtenir le $DL(0,5)$ de la fonction tangente !

1. Justifier que le $DL(0,5)$ de la fonction tangente est de la forme
$$\tan x = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5).$$
2. Sachant que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\tan' x = 1 + \tan^2 x$, exprimer le $DL(0,4)$ de $\tan' x$ en fonction des paramètres a, b et c.
3. En déduire le $DL(0,5)$ de la fonction tangente par intégration et identification.

Exercice 9. 5. Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \ln(x)$ et notons $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Donner le $DL(1,3)$ de f.

2. En déduire l'équation de la tangente Δ à $\mathcal{C}$ au point $A = (1, \frac{1}{2})$ et la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ au voisinage de A.

Exercice 9. 6. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 + x^2)e^{-x}$ et notons $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.
Trouver l'équation de la tangente Δ à $\mathcal{C}$ au point $A = (2, f(2))$ et déterminer la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ au voisinage de A.

Exercice 9. 7. Trouver un équivalent simple des suites suivantes et en déduire leur limite :

1. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
2. $u_n = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)}$
3. $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - n$

Chapitre 10. Intégrales généralisées

Exercice 10. 1. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}\ dx$
2. $\displaystyle\int_0^1 \ln x\ dx$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$
6. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^n}$
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

Exercice 10. 2. Étudier la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{5x^3+2x+3}{x^4+3x^2+1}\ dx$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\ dx$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\ dx$
5. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\ln x}$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\ dx$
7. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sqrt{x}}dx$
8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx$
9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$
10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^n}dx$

Chapitre 11. Matrices

Exercice 11. 1. Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer, si possible, les expressions suivantes : $A + B$, $A + {}^tC$, ${}^tB(A + {}^tC)$, D^2, BA^tD et CAB. Calculer C^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11. 2. Trouver les matrices échelonnées réduites associées aux matrices suivantes, en déduire leurs rangs. Lesquelles de ces matrices sont lignes équivalentes ?

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11. 3. Quelle est la matrice ligne échelonnée rd́uite associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & a & -1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}?$$

En déduire son rang.

Exercice 11. 4. Calculer les inverses des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11. 5. Soit $m \in \mathbb{R}$.

a. Pour $m \neq 2$, calculer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & m & 1 \\ 4 & 2m & 1 \end{pmatrix}$$

b. On considère le système d'équations linéaires

$$\left\{ \begin{array}{llll} x & +y & & = 1 \\ 2x & +my & +z & = 1 \\ 4x & +2my & +z & = b \end{array} \right. \text{ avec } \ b \in \mathbb{R}$$

1. Résoudre le système d'équations linéaires pour $m \neq 2$.
2. Pour $m = 2$, donner le nombre de solutions du système en fonction du paramètre b.

Exercice 11. 6. Trouver les solutions des systèmes linéaires suivants :

$$\text{a)} \left\{ \begin{array}{cccc} x & +y & -z & = 0 \\ x & +5y & +z & = 3 \\ 2x & +y & -z & = 1 \end{array} \right. \qquad \text{b)} \left\{ \begin{array}{cccc} x & +y & +z & = 4 \\ x & +by & +z & = 3 \\ x & +2by & +z & = 4 \end{array} \right.$$

Exercice 11. 7. Résoudre, à l'aide de la méthode de Gauss, le système d'équations linéaires :

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 3x & +5y & -4z & = 7 \\ -3x & -2y & +4z & = -1 \\ 6x & +y & +az & = b \end{array} \right. \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R}.$$

Chapitre 12. Déterminants

Exercice 12. 1. Calculer le déterminant des matrices suivantes en développant selon la ligne ou la colonne de votre choix.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 12. 2. Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$\mathbf{J_1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

,

$$\mathbf{J_2} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{J_3} = \begin{pmatrix} \sin\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\sin\theta \\ \cos\phi & 0 & -\rho\sin\phi \end{pmatrix}$$

Ces matrices interviendront en ING2. Elles correspondent à des matrices jacobiennes. Le déterminant de la matrice jacobienne est une quantité importante, car il permet de convertir des intégrales multiples entre différents systèmes de coordonnées. Calculons les déterminants des matrices jacobiennes $\mathbf{J_1}$ pour les coordonnées polaires, $\mathbf{J_2}$ pour les coordonnées cylindriques et $\mathbf{J_3}$ pour les coordonnées sphériques.

Exercice 12. 3. Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs de m pour lesquelles la matrice A est inversible, puis calculer la matrice inverse pour les valeurs de m trouvées.