∽ Baccalauréat Métropole 10 septembre 2025 ∾

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **6 points**

El Niño est un phénomène océanique à grande échelle du Pacifique équatorial qui affecte le régime des vents, la température de la mer et les précipitations sur l'ensemble du globe. Certaines années, ce phénomène est dit « dominant ». Les scientifiques cherchent à modéliser l'apparition de ce phénomène.

Dans cet exercice, les parties A et B sont indépendantes

Partie A - Premier modèle

À partir d'un échantillon de données, on considère une première modélisation :

- chaque année, la probabilité que le phénomène El Niño soit dominant est égale à $0,4$;
- la survenue du phénomène El Niño se fait de façon indépendante d'une année sur l'autre.

On note X la variable aléatoire qui, sur une période de 10 ans, associe le nombre d'années où El Niño est dominant.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
2. **a.** Calculer la probabilité que, sur une période de 10 ans, le phénomène El Niño soit dominant exactement 2 années.

   b. Calculer $P(X \leqslant 2)$. Que signifie ce résultat dans le contexte de l'exercice?
3. Calculer $E(X)$. Interpréter ce résultat.

Partie B - Second modèle

Après une étude d'un recueil de données plus important sur les 50 dernières années, une autre modélisation apparait plus pertinente :

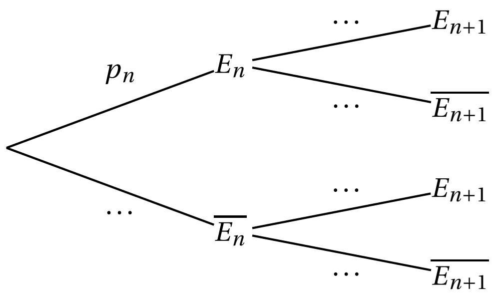
- si le phénomène El Niño est dominant une année, alors la probabilité qu'il le soit encore l'année suivante est $0,5$
- par contre, si le phénomène El Niño n'est pas dominant une année, alors la probabilité qu'il soit dominant l'année suivante est $0,3$.

On considère que l'année de référence est 2023.
On note pour tout entier naturel n :

- E_n l'évènement « le phénomène El Niño est dominant l'année $2023+n$ »;
- p_n la probabilité de l'évènement E_n.

En 2023, El Niño n'était pas dominant. On a ainsi $p_0 = 0$.

1. Soit n un entier naturel. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Justifier que $p_1 = 0,3$.

3. En vous aidant de l'arbre, montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$p_{n+1} = 0,2p_n + 0,3$$

On cherche à prévoir l'évolution de l'apparition du phénomène El Niño.

4. **a.** Conjecturer les variations et la limite éventuelle de la suite (p_n).

b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $p_n \leqslant \frac{3}{8}$.

c. Déterminer le sens de variation de la suite (p_n).

d. En déduire la convergence de la suite (p_n).

On cherche à déterminer la limite de la suite (p_n).

5. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = p_n - \frac{3}{8}$ pour tout entier naturel n.

a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique de raison 0,2 et préciser son premier terme.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$p_n = \frac{3}{8}\left(1 - 0,2^n\right).$$

c. Calculer la limite de la suite (p_n).

d. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 2 — 5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est juste ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Dans une classe de 24 élèves, il y a 14 filles et 10 garçons.

Affirmation 1 :

Il est possible de constituer 272 groupes différents de quatre élèves composés de deux filles et deux garçons.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\sin(2x+\pi)$ et C sa courbe représentative dans un repère donné.

   Affirmation 2 :

   Une équation de la tangente à C au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$ est $y = 6x - 3\pi$.

3. On considère la fonction F définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = (2x+1)\ln(x)$.

   Affirmation 3 :

   La fonction F est une primitive de la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2}{x}$.

4. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = 45\mathrm{e}^{0,06t} + 20$.

   Affirmation 4 :

   La fonction g est l'unique solution de l'équation différentielle

   (E_1) $y' + 0,06y = 1,2$ vérifiant $g(0) = 65$.

5. On considère l'équation différentielle :

$$(E_2): \quad y' - y = 3\mathrm{e}^{0,4x}$$

   où y est une fonction positive de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' la fonction dérivée de la fonction y.

   Affirmation 5 :

   Les solutions de l'équation (E_2) sont des fonctions convexes sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 3 **4 points**

On considère la fonction f définie sur $]0\,;8]$ par

$$f(x) = \frac{10\ln\left(-x^2+7x+9\right)}{x}$$

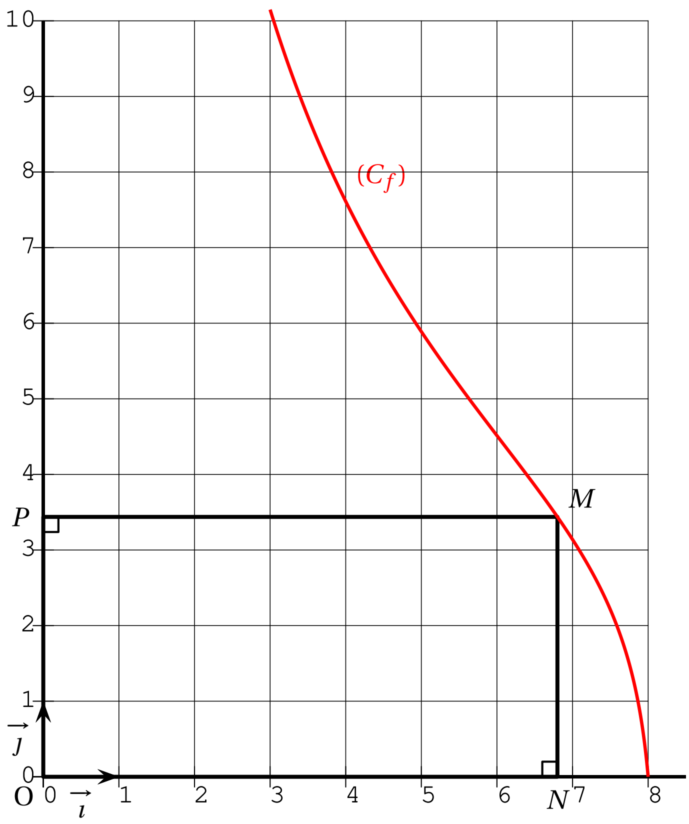
Soit C_f la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-x^2 + 7x + 8 \geqslant 0$.
2. En déduire que pour tout $x \in]0\,;\,8]$, on a $f(x) \geqslant 0$.
3. Interpréter graphiquement ce résultat.

Partie B

La courbe C_f est représentée ci-dessous.
Soit M le point de C_f d'abscisse x avec $x \in]0\,;\,8]$.
On appelle N et P les projetés orthogonaux du point M respectivement sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.
Dans cette partie, on s'intéresse à l'aire $\mathscr{A}(x)$ du rectangle ONMP.



1. Donner les coordonnées des points N et P en fonction de x.

2. Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,8]$,

$$\mathscr{A}(x) = 10\ln\left(-x^2+7x+9\right)$$

3. Existe-t-il une position du point M pour laquelle l'aire du rectangle ONMP est maximale ? Si elle existe, déterminer cette position.

Partie C

On considère un réel strictement positif k.
On souhaite déterminer la plus petite valeur de x, approchée au dixième, appartenant à $[3{,}5\,;\,8]$ pour laquelle l'aire $\mathscr{A}(x)$ devient inférieure ou égale à k.
Pour ce faire, on considère l'algorithme ci-dessous.
Pour rappel, en langage Python, $\ln(x)$ s'écrit log (x).

```
from math import *

def A(x) :
  return 10*log (- 1* x**2 + 7*x + 9)

def pluspetitevaleur(k) :
  x = 3.5
  while A(x).......... :
    x = x + 0.1
  return ..........
```

1. Recopier et compléter les lignes 8 et 10 de l'algorithme.

2. Quel nombre renvoie alors l'instruction `pluspetitevaleur(30)` ?

3. Que se passe-t-il lorsque $k = 35$? Justifier.

EXERCICE 4 **5 points**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On considère les points

$$\mathrm{A}(4\,;\,-1\,;\,3),\quad \mathrm{B}(-1\,;\,1\,;\,-2),\quad \mathrm{C}(0\,;\,4\,;\,5) \text{ et } \mathrm{D}(-3\,;\,-4\,;\,6).$$

1. **a.** Vérifier que les points A, B, C ne sont pas alignés.

   On admet qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $29x + 30y - 17z = 35$.

   b. Les points A, B, C, D sont-ils coplanaires ? Justifier.

On admet que lorsque quatre points ne sont pas coplanaires, il existe un unique point situé à égale distance de ces quatre points.
L'objectif de cet exercice est de déterminer le point H se situant à égale distance des quatre points A, B, C, D.
On définit le plan médiateur d'un segment comme le plan passant par le milieu de ce segment et orthogonal à la droite portant ce segment. C'est l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment.

2. Soit P_1 le plan médiateur du segment [AB].

   a. Déterminer les coordonnées du milieu du segment [AB].

   b. En déduire qu'une équation cartésienne de P_1 est : $5x - 2y + 5z = 10$.

3. On note P_2 le plan médiateur du segment [CD].

   a. Soit M un point du plan P_2 de coordonnées $(x\,;\ y\,;\ z)$.
   Exprimer MC^2 et MD^2 en fonction des coordonnées de M.
   En déduire qu'une équation cartésienne du plan P_2 est : $-3x - 8y + z = 10$.

   b. Justifier que les plans P_1 et P_2 sont sécants.

4. Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x &=& -2-1,9t \\ y &=& t \\ z &=& 4+2,3t \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

   Démontrer que Δ est la droite d'intersection de P_1 et P_2.

On note P_3 le plan médiateur du segment [AC].
On admet qu'une équation cartésienne du plan P_3 est : $8x - 10y - 4z = -15$.

5. Démontrer que la droite Δ et le plan P_3 sont sécants.

6. Justifier que le point d'intersection entre Δ et P_3 est le point H.