EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les cinq questions sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse correcte et justifiée rapporte 1 point.

1. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère la droite $\mathcal{D}$ dont on donne une représentation paramétrique, et le plan $\mathcal{P}$ dont on donne une équation cartésienne :

$$\mathcal{D}\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1-2t \\ y & = & t \\ z & = & -5-4t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \mathcal{P} : \quad 3x+2y-z-5=0.$$

   Affirmation 1 : la droite $\mathcal{D}$ est strictement parallèle au plan $\mathcal{P}$.

2. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère le point A(1 ; 9 ; 0) et le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne : $4x - y - z + 3 = 0$.

   Affirmation 2 : la distance du point A au plan $\mathcal{P}$ est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Soit la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = \dfrac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$.
   On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.
   Affirmation 3 : la courbe $\mathcal{C}$ admet deux asymptotes parallèles à l'axe des abscisses.

4. Pour tout réel x, on pose $F(x) = \displaystyle\int_1^x (2-t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

   Affirmation 4 : $F(x)$ est négatif ou nul quelle que soit la valeur du réel x supérieur à 1.

5. On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t^2 \ln t\,\mathrm{d}t$.

   Affirmation 5 : la valeur exacte de l'intégrale I est : $\dfrac{2\mathrm{e}^3+1}{9}$.