VARIABLES ALEATOIRES CONTINUES / ECHANTILLONNAGE

A DENSITE DE PROBABILITE

Si f est une fonction définie et positive sur ***R*** , si f est continue sur ***R***

Sauf en un nombre fini de point de discontinuité

Et si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ = 1 alors f est une densité de probabilité

Par définition $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ = $\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} f(x)dx$

Si X est une variable aléatoire continue qui a pour densité f

Alors pour tous réels a et b tels que a < b

P($a \leq X \leq b$) = $\int_{a}^{b} f(x)dx$

L' espérance de X vaut : E(X) = $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

La fonction de répartition est définie par : F(x) = P(X ≤ x) = $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

B LOI UNIFORME

si a < b X suit une loi uniforme sur l' intervalle [a ; b]

si X a pour densité :

f(x) = $\frac{1}{b-a}$ si x ∈ [a ; b]

f(x) = 0 si x n' appartient pas l' intervalle [a ; b]

si a < c < d < b alors p(c ≤ X ≤ d) = $\frac{d-c}{b-a}$

on a alors E(X) = $\frac{a+b}{2}$

C LOI EXPONENTIELLE

Soit λ un réel strictement positif

Si X a pour densité f définie par :

. f(x) = 0 si x < 0

. f(x) = $\lambda e^{-\lambda x}$ si x $\geq$ 0 alors X suit une loi exponentielle de paramètre λ

Si a et b sont deux réels positifs tels que a $\leq$ b alors

P(X $\leq$ a) = 1 - $e^{-\lambda a}$ P(a $\leq$ X $\leq$ b) = $e^{-\lambda a}$ - $e^{-\lambda b}$

E (X) = $\frac{1}{\lambda}$

D LOI NORMALE

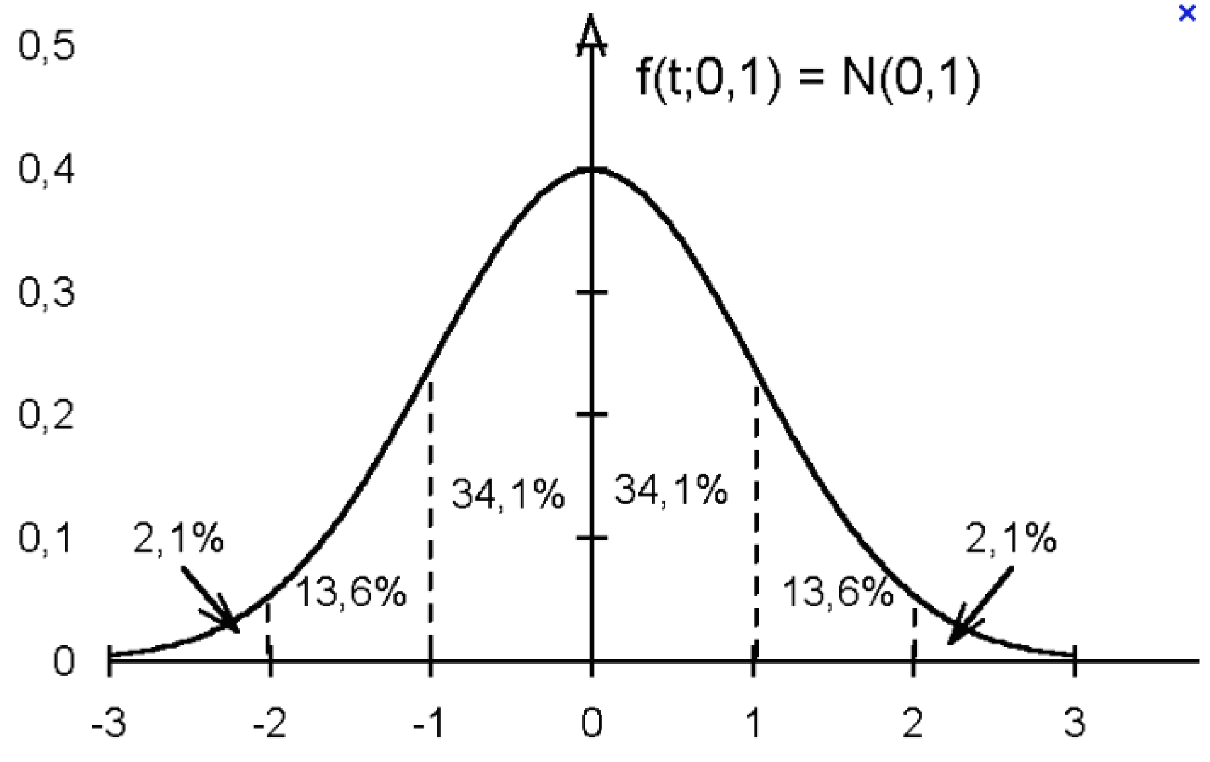
1) <u>LOI NORMALE CENTREE REDUITE N(0 ; 1)</u>

Définition

X suit une loi centrée réduite N(0 ; 1) si X a pour densité f définie sur ***R*** par

. f(x) = $\frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Si P(a $\leq$ X $\leq$ b) = $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{dx}$



Si X suit une loi centrée réduite N(0 ; 1) alors E(X) = 0 et V(X) = 1

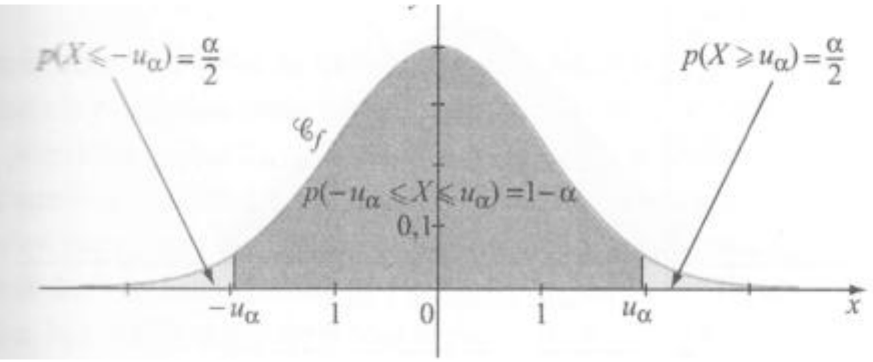
Soit F définie par F(x) $= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ = P(X ≤ x)

Alors si a > 0 P(-a ≤ X ≤ a) = 2 P(0 ≤ X ≤ a) = 2 (F(a) - $\frac{1}{2}$) = 2F(a) - 1

Si X suit une loi centrée réduite N(0 ; 1) alors ∀ α ∈]0 ; 1 [

Il existe un unique réel $U_\alpha > 0$ tel que P(-U_α ≤ X ≤ U_α) = 1 - α

Pour α = 0,05 $U_\alpha \approx 1,96$



2) LOI NORMALE N(m ; σ^2)

X suit une loi normale N(m ; σ^2) ssi Z = $\frac{X-m}{\sigma}$ suit une loi normale N(0 ; 1)

On a alors E(X) = m et V (X) = σ^2

Si X suit une loi normale N(m ; σ^2)

Alors P(m – σ ≤ X ≤ m + σ) ≈ 0,68 à 0,01 prés

P(m – 2σ ≤ X ≤ m +2 σ) ≈ 0,95 à 0,01 prés

P(m – 3σ ≤ X ≤ m + 3σ) ≈ 0,997 à 0,001 prés

3) THEOREME DE MOVRE-LAPLACE

Soit p un réel tel que 0 <p < 1 On suppose que $\forall\, n \geq 1$, la variable aléatoire X_n

Suit une loi binomiale B(n ; p)

On pose $X_n^* = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$

Alors pour tous réels a et b tels que a < b :

$$\lim_{n\to\infty}(P(a \leq X_n^* \leq b)) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

C' est à dire $\lim_{n\to\infty}(P(a \leq X_n^* \leq b))$ = P(a ≤Z≤b)

Où Z suit une loi normale N(0 ; 1)

E ECHANTILLONNAGE

Soit p un réel tel que $0 < p < 1$

On considère une population d' individus qui présente un caractère C avec une probabilité p

On extrait un échantillon de taille n , n est un entier naturel non nul

Soit X_n le nombre d' individus dans l' échantillon qui présente le caractère C

X_n suit une loi binomiale B(n ; p)

$F_n = \frac{X_n}{n}$ est la fréquence d' apparition du caractère C

$F_n = \frac{X_n}{n}$ alors $E(F_n) = p$ et $\sigma(F_n) = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$

$\mathrm{F}_\mathrm{n}^* = \frac{F_n - p}{\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}} = X_n^*$

Soit $\alpha \in]0 ; 1[$

Soit $I_\alpha = [\, p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \;;\; p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \,]$

Alors I_α est l ' intervalle de fluctuation asymptotique au seuil $1 - \alpha$

Alors $\lim_{n \to +\infty} P(F_n \in I_\alpha) = 1 - \propto$

Pour $n \geq 30$, $n p \geq 5$, $n(1-p) \geq 5$

On peut considérer que F_n^* suit une loi normale N(0 ; 1)

$P(F_n \in I_\propto) = 1 - \propto$

En particulier $p(F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}) \geq 0,95$

Si on connait f mais pas p alors l' intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95

est $[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$