Une entreprise fabrique et commercialise un alliage métallique. Chaque mois, elle peut produire jusqu'à 10 tonnes de cet alliage et en vend toute la production.

Partie A - Étude du coût total et de la recette

Le coût total de production de x tonnes de l'alliage, exprimé en milliers d'euros, est modélisé par la fonction C dont l'expression est

$$C(x) = x^3 - 6x^2 + 24x + 135$$

où x appartient à l'intervalle $[0\,;\,10]$.
La courbe Γ, représentant la fonction C dans un repère du plan, est donnée en annexe.

1. Donner par lecture graphique :
   a. le coût total d'une production de 4 tonnes ;
   b. la quantité correspondant à un coût total de production de 600 milliers d'euros.
2. Déterminer par le calcul :
   a. le coût total de production de 6 tonnes de l'alliage.
   b. le coût moyen de production d'une tonne lorsque l'entreprise produit 6 tonnes.
3. Après une étude de marché, le prix de vente de l'alliage produit a été fixé à 60 milliers d'euros la tonne.
   a. Calculer la recette pour la vente de 5 tonnes d'alliage.
   b. On note R la fonction qui modélise la recette, exprimée en milliers d'euros, pour x tonnes vendues. Donner une expression de $R(x)$ en fonction de x.
   c. Représenter graphiquement la fonction R sur l'intervalle $[0\,;\,10]$, dans le même repère que la courbe Γ sur l'annexe.
   d. Pour quelles valeurs de x l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?

Partie B - Étude algébrique du bénéfice

On note B la fonction qui modélise le bénéfice, exprimé en milliers d'euros, sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

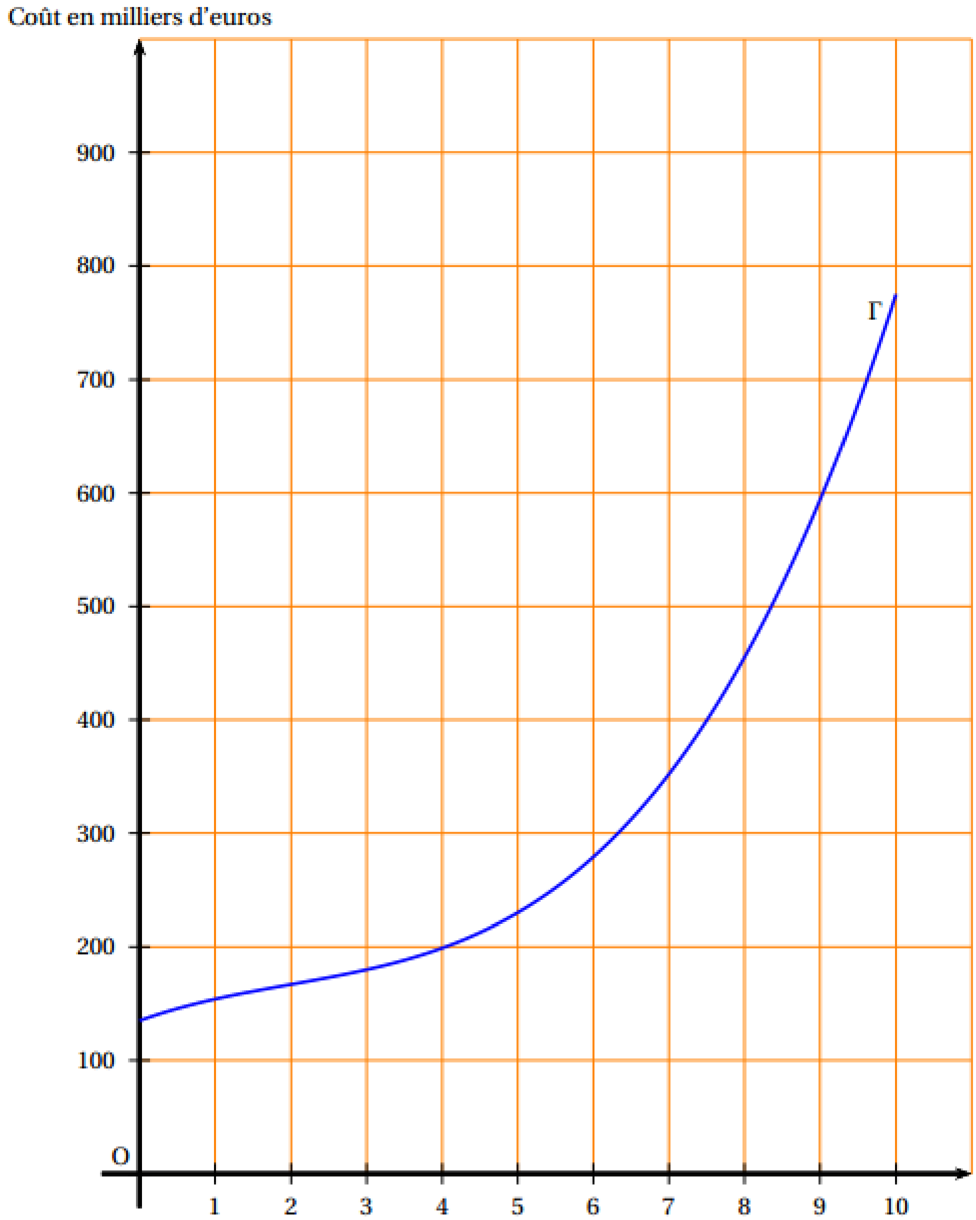
1. Montrer que l'expression de $B(x)$, lorsque x appartient à l'intervalle $[0\,;\,10]$ est :

$$B(x) = -x^3 + 6x^2 + 36x - 135.$$

2. On note B' la fonction dérivée de la fonction B. Calculer $B'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,10]$.
3. On admet que $B'(x)$ peut s'écrire

$$B'(x) = (x+2)(18-3x).$$

   Étudier le signe de B' et en déduire les variations de B sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.
4. Déterminer la quantité d'alliage à produire pour réaliser un bénéfice maximal.


Coût en milliers d'euros
900
800
700
600
500
400
300
200
100
O
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Γ