

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \frac{n^{10}}{2^n}$. On définit ainsi une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'équivalence suivante :

$$u_{n+1} \leq 0,95 u_n \text{ si et seulement si } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9.$$

2. On considère la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{10}$.

- a. Étudier le sens de variation et la limite en $+\infty$ de la fonction f .
- b. Montrer qu'il existe dans l'intervalle $[1, +\infty[$ un unique nombre réel α tel que $f(\alpha) = 1,9$.
- c. Déterminer l'entier naturel n_0 tel que : $n_0 - 1 \leq \alpha \leq n_0$.
- d. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, on a :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9.$$

3. a. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) à partir du rang 16.

b. Que peut-on en déduire pour la suite ?

4. En utilisant un raisonnement par récurrence, prouver, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, l'encadrement :

$$0 \leq u_n \leq 0,95^{n-16} u_{16}.$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.