

EXERCICE 1**5 points**

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$.

1.
 - a. Démontrer que pour tout $n \geq 3, u_n \geq 0$.
 - b. En déduire que pour tout $n \geq 4, u_n \geq n - 2$.
 - c. En déduire la limite de la suite (u_n) .
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = 4u_n - 8n + 24$.
 - a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique décroissante dont on donnera la raison et le premier terme.
 - b. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$.
 - c. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = x_n + y_n$ où (x_n) est une suite géométrique et (y_n) une suite arithmétique dont on précisera pour chacune le premier terme et la raison.
 - d. En déduire l'expression de $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ en fonction de n .