On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$

et $\forall$ n ∈ ***N*** , $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (1)

1) Calculer 7 premier termes de la suite (u_n)

2) Montrer qu' il existe deux réels q_1 et q_2 tels que la suite définie par $v_n = q^n$
Vérifie la relation de récurrence (1) (on prendra $q_1 < q_2$)

3) Justifier que $\forall$ i ∈ { 1 , 2 } , ${q_i}^2 = q_i + 1$ et $\frac{1}{q_i} = q_i - 1$

4) Soit λ et μ deux réels quelconques , montrer que la suite (f_n) de termes général
$f_n = \lambda\, {q_1}^n + \mu\, {q_2}^n$ vérifie la relation (1)

5) Démontrer qu' il existe un unique couple (λ_0, μ_0) tel que
$f_0 = u_0$ et $f_1 = u_1$

6) En déduire que pour tout entier naturel n : $u_n = \lambda_0\, {q_1}^n + \mu_0\, {q_2}^n$

7) En déduire la limite de la suite $\frac{u_{n+1}}{u_n}$