113. BAC Récurrence double au Bac

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = -1,\ u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n \end{cases}.$$

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2. On définit la suite (v_n) en posant pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

a. Calculer v_0.

b. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

c. En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

d. Exprimer v_n en fonction de n entier naturel.

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$w_n = \frac{u_n}{v_n}.$$

a. Calculer w_0.

b. En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.

c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.

d. Exprimer w_n en fonction de n entier naturel.

4. Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{2n-1}{2^n}.$$

5. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + \ldots + u_n.$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

D'après Bac, 2010