

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = 5\ln(x+3) - x.$$

1. a. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f sur $[0; +\infty[$. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0; +\infty[$.
 b. Donner, dans un tableau, les variations de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
 c. Montrer que, pour tout x strictement positif on a

$$f(x) = x \left(5 \frac{\ln x}{x} - 1 \right) + 5 \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right).$$

- d. En déduire la limite de f en $+\infty$.
 e. Compléter le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
2. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0; +\infty[$. On notera α cette solution.
 b. Après avoir vérifié que α appartient à l'intervalle $[14; 15]$, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
 c. En déduire le signe de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 4 \\ u_{n+1} & = & 5\ln(u_n+3) \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n \neq 0$$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$g(x) = 5\ln(x+3).$$

En annexe 1 on a tracé dans un repère orthonormé la droite \mathcal{D} d'équation $y = x$ et la courbe \mathcal{C} , courbe représentative de la fonction g .

1. a. Construire sur l'axe des abscisses de l'annexe 1 les termes u_0, u_1, u_2 de la suite (u_n) en utilisant la droite et la courbe données et en laissant apparents les traits de construction.
 b. Formuler une conjecture sur le sens de variations de la suite (u_n)
2. a. Étudier le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
 b. Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$ où α est défini dans la partie A question 2. a.
 c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $0 \leq u_n \leq \alpha$.
 d. Démontrer alors la conjecture émise à la question 1. b. de la partie B.

e. En utilisant la question 2. a. de la partie A, justifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

3. On considère l'algorithme suivant :

```
u prend la valeur 4
Répéter Tant que  $u - 14,2 < 0$ 
    u prend la valeur de  $5 \ln(u + 3)$ 
Fin du Tant que
Afficher u
```

- a. Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Justifier que cet algorithme se termine.
- b. Donner la valeur que cet algorithme affiche (on arrondira à 5 décimales).

