

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par

$$u_0 = 3 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{7}{u_n} \right) \quad (*)$$

On pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n > 0$ .

1. On désigne par  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{7}{x} \right).$$

Démontrer que la fonction  $f$  admet un minimum.

En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq \sqrt{7}$ .

2. a. Soit  $n$  un entier naturel quelconque.

Étudier le signe de  $u_{n+1} - u_n$ .

- b. Pourquoi peut-on en déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente?

- c. On déduit de la relation  $(*)$  que la limite  $\ell$  de cette suite est telle que  $\ell = \frac{1}{2} \left( \ell + \frac{7}{\ell} \right)$ .

Déterminer  $\ell$ .

3. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2} \frac{(u_n - \sqrt{7})^2}{u_n}$ .

4. On définit la suite  $(d_n)$  par :

$$d_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad d_{n+1} = \frac{1}{2} d_n^2.$$

- a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n - \sqrt{7} \leq d_n.$$

- b. Voici un algorithme :

Variables :	$n$ et $p$ sont des entiers naturels $d$ est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de $p$ .
Initialisations :	Affecter à $d$ la valeur 1. Affecter à $n$ la valeur 0
Traitement :	Tant que $d > 10^{-p}$ .   Affecter à $d$ la valeur $0,5d^2$   Affecter à $n$ la valeur $n + 1$ .
Sortie :	Afficher $n$ .

En entrant la valeur 9, l'algorithme affiche le nombre 5.

Quelle inégalité peut-on en déduire pour  $d_5$  ?

Justifier que  $u_5$  est une valeur approchée de  $\sqrt{7}$  à  $10^{-9}$  près.