

52 ★★★ On considère les deux suites à termes strictement positifs (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier $n \geq 1$ par :

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n} ;$$

$$v_n = \frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n}{3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)} .$$

On se propose ici de démontrer que ces deux suites sont convergentes vers 0 .

1° Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle converge vers un réel ℓ .

2° Démontrer que la suite (v_n) est décroissante et en déduire qu'elle converge vers un réel ℓ' .

3° On considère à présent la suite (w_n) définie, pour tout entier $n \geq 1$, par $w_n = u_n v_n$.

a) Compte tenu de la convergence des suites (u_n) et (v_n) vers ℓ et ℓ' , que peut-on en déduire pour (w_n) ?

b) Déterminer l'expression de (w_n) en fonction de n , et en déduire l'égalité $\ell\ell' = 0$.

4° Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $u_n < v_n$.
En déduire que $\ell = 0$.

5° Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$2u_{n+1} > v_n .$$

En déduire l'inégalité $2\ell \geq \ell'$ et conclure.