49 ★ On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier $n \geqslant 1$, par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \ ;$$

$$v_1 = 12 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} \ .$$

1° Calculer u_2, v_2, u_3 et v_3.

2° On pose $w_n = v_n - u_n$.

Démontrer que (w_n) est géométrique et préciser sa limite.

3° Après avoir étudié les sens de variation des suites (u_n) et (v_n), démontrer que ces deux suites sont adjacentes.

Que peut-on en déduire ?

4° On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par $t_n = 3u_n + 8v_n$.

Démontrer que cette suite est constante, et en déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).