50 ★★ Soit a et b deux nombres réels vérifiant $0 < a < b$.

On définit les suites (u_n) et (v_n) par :

$$u_0 = a \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \ ;$$

$$v_0 = b \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \ .$$

1° Vérifier que (u_n) et (v_n) sont strictement positives.

2° On pose, pour tout entier naturel n, $w_n = v_n - u_n$.

Démontrer que $0 \leqslant w_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} w_n$ et en déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que :

pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant w_n \leqslant \dfrac{b-a}{2^n}$.

3° Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante.

4° Que peut-on en déduire pour les suites (u_n) et (v_n) ?

5° À l'aide de l'étude de la suite $(u_n v_n)$, déterminer la valeur de la limite commune des suites (u_n) et (v_n).

Application : En prenant $a = 3$ et $b = 5$, déterminer à l'aide de (u_n) et (v_n) un encadrement d'amplitude inférieure à 10^{-2} de $\sqrt{15}$ par deux rationnels.