

44 ★ On se propose de démontrer que quel que soit l'entier naturel $\alpha \geq 2$, la suite définie, pour tout entier $n \geq 1$, par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ est convergente.

A. Cas $\alpha = 2$

1° Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

2° Justifier la croissance de la suite (u_n) .

3° Soit k un entier tel que $k \geq 2$; justifier que l'on a :

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)},$$

puis démontrer l'égalité $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

4° Démontrer que, pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$u_n \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

En déduire la convergence de (u_n) .

B. Cas $\alpha \geq 3$

1° Justifier la croissance de (u_n) .

2° Démontrer que, pour tout entier $k \geq 1$, on a $\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{k^2}$,

et en déduire que (u_n) est majorée par 2. Conclure.