Exercice 4 — 7 points

Commun à tous les candidats.

L'annexe qui suit sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

Partie A

1. On considère la fonction g définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = \ln(2x) + 1 - x$$

a. *Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la rédaction.*

Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[1\ ;\ +\infty[$ une unique solution notée α.

b. Démontrer que $\ln(2\alpha) + 1 = \alpha$.

2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = \ln(2u_n) + 1$.
On désigne par (Γ) la courbe d'équation $y = \ln(2x) + 1$ dans un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Cette courbe est donnée dans l'annexe.

a. En utilisant la courbe (Γ) ,construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.

c. Démontrer que la suite (u_n) converge vers α.

EXERCICE 4