

**EXERCICE 1****6 points****Commun à tous les candidats**Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $] -1 ; +\infty[$  par

$$f(x) = 1 + \ln(1 + x).$$

On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .On note  $D$  la droite d'équation  $y = x$ .**Partie A**

1.
  - a. Étudier le sens de variation de la fonction  $f$ .
  - b. Déterminer les limites de la fonction  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
2. On désigne par  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $] -1 ; +\infty[$  par  $g(x) = f(x) - x$ .
  - a. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$ .
  - b. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ . En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .
  - c. Étudier le sens de variation de la fonction  $g$ , puis dresser le tableau de variations de la fonction  $g$ .
  - d. Montrer que sur l'intervalle  $] -1 ; +\infty[$  l'équation  $g(x) = 0$  admet exactement deux solutions  $\alpha$  et  $\beta$ , avec  $\alpha$  négative et  $\beta$  appartenant à l'intervalle  $[2 ; 3]$ .
  - e. À l'aide des questions précédentes, déterminer le signe de  $g(x)$ . En déduire la position relative de la courbe  $\mathcal{C}_f$  et de la droite  $D$ .

**Partie B**

*Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout nombre entier naturel  $n$  par : 
$$\begin{cases} u_0 & = 2 \\ u_{n+1} & = f(u_n) \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout nombre entier naturel  $n$ ,  $2 \leq u_n \leq \beta$ .
2. La suite  $(u_n)$  est-elle convergente ? Justifier la réponse.