

**EXERCICE 4****6 points****Commun à tous les candidats****Partie A**

Soit  $g$  la fonction définie pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $]0; +\infty[$  par

$$g(x) = x - x \ln x.$$

1. Déterminer les limites de la fonction  $g$  en 0 et  $+\infty$ .
2. Montrer que  $g$  est dérivable sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  et que  $g'(x) = -\ln x$ .
3. Dresser le tableau de variations de la fonction  $g$ .

**Partie B**

Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par  $u_n = \frac{e^n}{n^n}$ .

1. Conjecturer, à l'aide de la calculatrice :
  - a. le sens de variation de la suite  $(u_n)$ ;
  - b. la limite éventuelle de la suite  $(u_n)$ .
2. Soit  $(v_n)$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par  $v_n = \ln(u_n)$ .
  - a. Montrer que  $v_n = n - n \ln n$ .
  - b. En utilisant la **Partie A**, déterminer le sens de variation de la suite  $(v_n)$ .
  - c. En déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .
3. Montrer que la suite  $(u_n)$  est bornée.
4. Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.