

EXERCICE 4**4 points****Commun à tous les candidats**

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

1. On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln(1+x).$$

- a. En étudiant les variations de la fonction f , montrer que, pour tout réel x positif ou nul, $\ln(1+x) \leq x$.
 - b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(u_n) \leq 1$.
 - c. La suite (u_n) peut-elle avoir pour limite $+\infty$?
2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par :
 $v_n = \ln(u_n)$.
- a. On pose $x = \frac{1}{n}$. Exprimer v_n en fonction de x .
 - b. Que vaut $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$? Aucune justification n'est demandée.
Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.
 - c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.