

EXERCICE 3

5 points

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On considère l'ensemble (E) des suites (x_n) définies sur \mathbb{N} et vérifiant la relation suivante :

pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} - x_n = 0,24x_{n-1}$.

1. On considère un réel λ non nul et on définit sur \mathbb{N} la suite (t_n) par $t_n = \lambda^n$.
Démontrer que la suite (t_n) appartient à l'ensemble (E) si et seulement si λ est solution de l'équation $\lambda^2 - \lambda - 0,24 = 0$.
En déduire les suites (t_n) appartenant à l'ensemble (E).
On admet que (E) est l'ensemble des suites (u_n) définies sur \mathbb{N} par une relation de la forme :

$$u_n = \alpha(1,2)^n + \beta(-0,2)^n \quad \text{où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux réels.}$$

2. On considère une suite (u_n) de l'ensemble (E).
Déterminer les valeurs de α et β telles que $u_0 = 6$ et $u_1 = 6,6$.
En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{39}{7}(1,2)^n + \frac{3}{7}(-0,2)^n$.
3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$v_0 = 6 \text{ et, pour tout entier naturel } n, v_{n+1} = 1,4v_n - 0,05v_n^2$$

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 1,4x - 0,05x^2$.
 - a. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 8]$.
 - b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,
 $0 \leq v_n < v_{n+1} \leq 8$.
2. En déduire que la suite (v_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ .