EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 5 \quad \text{et, pour tout entier } n \geqslant 1,\ u_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)u_{n-1}+\frac{6}{n}.$$

1. **a.** Calculer u_1.

b. Les valeurs de u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11} sont respectivement égales à :

45, 77, 117, 165, 221, 285, 357, 437, 525, 621.

À partir de ces données conjecturer la nature de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $d_n = u_{n+1} - u_n$.

2. On considère la suite arithmétique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison 8 et de premier terme $v_0 = 16$.
Justifier que la somme des n premiers termes de cette suite est égale à $4n^2 + 12n$.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :
$u_n = 4n^2 + 12n + 5$.

4. Valider la conjecture émise à la question **1. b.**.