

EXERCICE 1**5 points****Commun à tous les candidats**On considère la fonction f définie sur $] -\infty ; 6[$ par

$$f(x) = \frac{9}{6-x}$$

On définit pour tout entier naturel n la suite (U_n) par

$$\begin{cases} U_0 & = & -3 \\ U_{n+1} & = & f(U_n) \end{cases}$$

1. La courbe représentative de la fonction f est donnée sur la feuille jointe accompagnée de celle de la droite d'équation $y = x$. Construire, sur cette feuille annexe les points $M_0 (U_0 ; 0)$, $M_1 (U_1 ; 0)$, $M_2 (U_2 ; 0)$, $M_3 (U_3 ; 0)$ et $M_4 (U_4 ; 0)$.
Quelles conjectures peut-on formuler en ce qui concerne le sens de variation et la convergence éventuelle de la suite (U_n) ?
2.
 - a. Démontrer que si $x < 3$ a alors $\frac{9}{6-x} < 3$.
En déduire que $U_n < 3$ pour tout entier naturel n .
 - b. Étudier le sens de variation de la suite (U_n) .
 - c. Que peut-on déduire des questions 2. a. et 2. b.?
3. On considère la suite (V_n) définie par $V_n = \frac{1}{U_n - 3}$ pour tout entier naturel n .
 - a. Démontrer que la suite (V_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.
 - b. Déterminer V_n puis U_n en fonction de n .
 - c. Calculer la limite de la suite (U_n) .

ANNEXE (à rendre avec la copie)

