

EXERCICE 1**7 points**

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = xe^{-x}.$$

On note Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité graphique : 10 cm).

Partie A

1.
 - a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 - b. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
 - c. Construire Γ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
2.
 - a. Montrer que, pour tout réel m de $]0; \frac{1}{e}[$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions.
 - b. Dans le cas où $m = \frac{1}{4}$, on nomme α et β les solutions (avec $\alpha < \beta$).
Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .
 - c. Résoudre l'équation $f(x) = m$ dans le cas où $m = 0$ et $m = \frac{1}{e}$.

Partie B

1. On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par

$$\begin{cases} u_0 &= \alpha \\ u_{n+1} &= u_n e^{-u_n}, \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

où α est le réel défini à la question A. 2. b.

- a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.
 - b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
 - c. La suite (u_n) est-elle convergente? Si oui, déterminer sa limite.
2. On considère la suite (w_n) définie sur \mathbb{N} par $w_n = \ln u_n$.
 - a. Montrer que, pour tout n entier naturel, on a $u_n = w_n - w_{n+1}$.
 - b. On pose $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
Montrer que $S_n = w_0 - w_{n+1}$.
 - c. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.
 3. On considère la suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par son premier terme v_0 ($v_0 > 0$) et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = v_n e^{-v_n}$.
Existe-t-il une valeur de v_0 différente de α telle que, pour tout $n \geq 1$, on ait $u_n = v_n$?
Si oui, préciser laquelle.