Exercice 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. Soit x un nombre réel positif ou nul et k un entier strictement supérieur à x.

a. Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier n supérieur ou égal à k,

$$\frac{k^n}{n!} \leqslant \frac{k^k}{k!}.$$

b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à k,

$$\frac{x^n}{n!} \leqslant \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!}.$$

c. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

2. a. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2,

$$\frac{n^{n-1}}{n!} \geqslant 1.$$

(on pourra écrire $\dfrac{n^{n-1}}{n!}$ comme un produit de $n-1$ facteurs supérieurs ou égaux à 1).

b. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty.$$