

**EXERCICE 4****5 points****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**Soit la suite numérique  $(u_n)$  définie sur  $\mathbf{N}$  par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1.
  - a. Calculer  $u_1, u_2, u_3$  et  $u_4$ . On pourra en donner des valeurs approchées à  $10^{-2}$  près.
  - b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.
2.
  - a. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n \leq n + 3.$$

- b. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n).$$

- c. En déduire une validation de la conjecture précédente.
3. On désigne par  $(v_n)$  la suite définie sur  $\mathbf{N}$  par  $v_n = u_n - n$ .
  - a. Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{2}{3}$ .
  - b. En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n = 2 \left( \frac{2}{3} \right)^n + n$$

- c. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .
4. Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n \quad \text{et} \quad T_n = \frac{S_n}{n^2}.$$

- a. Exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$ .
  - b. Déterminer la limite de la suite  $(T_n)$ .