Exercice 4 : (5 points) ***Candidats n'ayant pas suivis l'enseignement de spécialité mathématiques***

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

1. (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$.
2. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n < 1$.
   (a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   (b) Démontrer que la suite (u_n) converge.
3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.
   (b) Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{3^n}{3^n+1}$.
   (d) Déterminer la limite de la suite (u_n).