1. Exercice 4 (7 points)

I. Première partie

On appelle *f* et *g* les deux fonctions définies sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x)=\ln(1+x)-x \text{ et } g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}.$$

1. Étudier les variations de *f* et de *g* sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. En déduire que pour tout $x\geq 0$, $x-\frac{x^2}{2}\leq \ln(1+x)\leq x$.

II. Deuxième partie

On se propose d'étudier la suite (u_n) de nombres réels définie par : $u_1=\frac{3}{2}$ et $u_{n+1}=u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$.

1. Montrer par récurrence que $u_n>0$ pour tout entier naturel $n\geq 1$.

2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n\geq 1$:

$$\ln u_n=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right).$$

3. On pose $S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}$ et $T_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^n}$

À l'aide de la première partie, montrer que : $S_n-\frac{1}{2}T_n\leq \ln u_n\leq S_n$.

4. Calculer S_n et T_n en fonction de *n*. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

5. Étude de la convergence de la suite (u_n).

a. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

b. En déduire que (u_n) est convergente. Soit *l* sa limite.

c. On admet le résultat suivant : si deux suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et telles que $v_n\leq w_n$ pour tout *n* entier naturel, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n\leq \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

Montrer alors que $\frac{5}{6}\leq \ln l\leq 1$ et en déduire, un encadrement de *l*.