

EXERCICE 1**5 points**

On considère la suite u de premier terme $u_0 = 0$ et définie pour tout entier positif par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + u_n}.$$

1. a. Montrer que pour tout entier n strictement positif on a l'encadrement :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq u_n \leq 1.$$

- b. Étudier le sens de variation de la suite u et en déduire que la suite u est convergente.
c. Déterminer la limite a de la suite u .
2. a. Montrer que pour tout nombre x de l'intervalle $[0 ; \pi]$, on a :

$$\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = \cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

- b. Montrer alors que pour tout entier naturel n on a :

$$u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right).$$

- c. Retrouver ainsi la limite a de la suite u .