TS **SUITES** feuille 41

1. Exercice 4 (7 points)

Soit *f* la fonction définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par $f\left(x\right)=x+e^{-x}$. On note (C) la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

Partie A

1. Étudier les variations de la fonction *f* sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

2. Déterminer la limite de *f* en $+\infty$.

3. Montrer que (C) admet une asymptote oblique dont on précisera une équation.

Partie B

On considère la suite $\left(u_n\right)_{n\geq 1}$ à termes positifs définie par : $u_1 = 0$ et, pour tout entier naturel *n* non nul, $u_{n+1}=f\left(u_n=u_n+e^{-u_n}\right)$.

1. Démontrer que, pour tout réel *x* positif, $\ln\left(1+x\right)\leq x$. On pourra étudier la fonction *g* définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par $g\left(x\right)=x-\ln\left(1+x\right)$.

2. En déduire que, pour tout entier naturel *n* non nul, $\ln\left(n+1\right)\leq\ln\left(n\right)+\dfrac{1}{n}$.

3. Démontrer que, pour tout entier naturel *n* non nul, $f\left(\ln\left(n\right)\right)=\ln\left(n\right)+\dfrac{1}{n}$.

4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n* non nul, $\ln\left(n\right)\leq u_n$.

5. En déduire la limite de la suite $\left(u_n\right)_{n\geq 1}$.

Dans la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier *n* supérieur ou égal à 2, $u_n\leq 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n-1}$.

6. a. Démontrer que, pour tout entier *k* supérieur ou égal à 2, on a : $\dfrac{1}{k}\leq\displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}\,dx$.

b. En déduire que, pour tout entier *n* supérieur ou égal à 2, on a : $u_n\leq 1+\ln\left(n-1\right)$.

7. Pour tout entier *n* supérieur ou égal à 2, on a montré que $\ln\left(n\right)\leq u_n\leq 1+\ln\left(n-1\right)$.

Démontrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{\ln\left(n\right)}\right)_{n>1}$ converge vers 1.