

Partie A

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = x - x \ln x$.

1. Déterminer les limites de la fonction g en 0 et $+\infty$.
2. Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et que $g'(x) = -\ln x$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction g .

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{e^n}{n^n}$.

1. Conjecturer, à l'aide de la calculatrice :
 - a. le sens de variation de la suite (u_n) ;
 - b. la limite éventuelle de la suite (u_n) .
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = \ln(u_n)$.
 - a. Montrer que $v_n = n - n \ln n$.
 - b. En utilisant la Partie A, déterminer le sens de variation de la suite (v_n) .
 - c. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
3. Montrer que la suite (u_n) est bornée.
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.