

Soit  $(u_n)$  la suite définie par 
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1) \end{cases}$$
 pour tout entier naturel  $n$ .

**Partie A**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$ .

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $f(x) = x$ .
2. Étudier le sens de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; 1]$ . En déduire que si  $x \in [0 ; 1]$  alors  $f(x) \in [0 ; 1]$ .

**Partie B**

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier  $n > 0$ ,  $u_n \in [0 ; 1]$ .
2. Étudier le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .
3. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est convergente. Déterminer sa limite.