TS **SUITES** feuille 40

1. Soit *f* la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right)-x$.

a. Déterminer les limites de la fonction *f* en 0 et en $+\infty$.

b. Montrer que la fonction *f* est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

c. Montrer qu'il existe un unique réel α appartenant à $]0\,;+\infty[$ tel que $f(\alpha)=0$. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

2. Soit *g* la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1{,}5$ et pour tout entier naturel *n* : $u_{n+1}=g(u_n)=\ln\left(1+\dfrac{1}{u_n}\right)$.

On a représenté ci-dessous la courbe C représentative de la fonction *g* et la droite d'équation $y = x$.

a. Construire sur l'axe des abscisses, en laissant les traits de construction apparents, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. Le graphique permet-il d'émettre les conjectures suivantes ? On recopiera sur la copie le numéro de la conjecture suivie de OUI ou NON. Aucune justification n'est demandée.

• Conjecture n° 1 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. »

• Conjecture n° 2 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0,5. »

• Conjecture n° 3 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. »

c. On admet que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite *L* strictement positive. Montrer que $\ln\left(1+\dfrac{1}{L}\right)=L$.

d. Montrer que $L=\alpha$.